



**زیربرنامه:**

ConMeanFlow\_AUSMPlus\_HO3D

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **توسعه دهندگان** | مرتضی نامور |  |
| علیرضا رضایی |  |
| **تهیه کنندگان مستند** | مرتضی نامور، علیرضا رضایی | |
| **تاییدکنندگان** |  | |
| **تاریخ تنظیم سند** | 22/02/95 | |
| **شناسه سند** | **MC2F078F1** | |
| **زبان برنامه‌نویسی** | **Fortran 90** | |

1. وظایف

در این زیربرنامه مقدار بخش جابجایی معادلات حاکم با استفاده از روش بالادستی AUSM+ با دقت مرتبه دو محاسبه می گردد. این زیربرنامه می تواند برای جریان های غیرلزج، آرام و مغشوش بکار برده شود.

* 1. اصلاحات مربوط به دقت مرتبه دو

**توجه:** بهتر است ابتدا زیربرنامه مربوط به درجه دقت یک مطالعه شود زیرا اصلاحات مربوط به درجه دقت دو با فرض اینکه خواننده با نحوه گسسته سازی بخش جابجایی (با درجه دقت یک) آشنایی دارد گفته می شود. تفاوت درجه دقت مرتبه دو و یک در این قسمت گفته می شود و سایر قسمت ها کاملا شبیه دقت مرتبه یک می باشد.

همانگونه که می دانیم در درجه دقت یک، هنگام محاسبه شارهای جابجایی، مقدار یک خاصیت در وجه یک سلول برابر مقدار آن در مرکز سلول قرار داده می شود. که به نوع از تخمین یک خاصیت در وجه یک سلول دقت مرتبه اول گفته می شود. در دقت مرتبه های بالا مقدار خاصیت ها با استفاده از بسط تیلور و بعبارت دیگر بازسازی آن خاصیت در وجه بدست می آید.

برای اینکار ابتدا یک یا چند نقطه که با توزیع گوسی بر روی وجه های سلول ها پراکنده شده است، مقدار یک خاصیت بر روی وجه محاسبه می شود و سپس مقدار بخش جابجایی بر روی آن وجه محاسبه می شود ابته این تنها قسمتی از بخش جابجایی می باشد و باید بخش جابجایی برای هر کدام از نقاط گوسی محاسبه شده و در انتها جمع شوند. البته برای هر کدام از نقاط گوسی یک وزن در نظر گرفته می شود که مجموع این وزن ها برابر واحد است.

نحوه بازسازی خاصیت ها در نقاط گوسی واقع بر روی وجه سلول نیز با استفاده از بسط تیلور انجام می شود اما از آنجا که نباید مقدار خاصیت بازسازی شده بر روی یک وجه یک سلول از مقدار آن خاصیت در آن و سلول های همسایه بیشتر باشد، از مفهومی بنام محدود کننده یا Limiter استفاده می شود که در این مورد در مستندات مربوط به زیربرنامه ها مربوط به محدود کننده بطور مفصل پرداخته شده است. محدود کننده برای هر خاصیت بطور جداگانه تعریف می شود که هنگام بازسازی یک خاصیت باید مقدار محدود کننده آن خاصیت در بازسازی آن خاصیت شرکت داده شود.

* 1. نحوه پیاده سازی

برای نحوه پیاده سازی محاسبه بخش جابجایی به اندازه نقاط گوسی انجام می شود. برای بازسازی یک خاصیت نیز زیربرنامه Recons2Ord فراخوانی شده و مقدار آن خاصیت بدست می آید. بنابراین تنها تفاوت پیاده سازی در این است که بجای یک متوسط گیری که در دقت مرتبه یک استفاده شده بود در اینجا از مقادیر بازسازی شده استفاده می شود و مقدار بخش جابجایی برای هر کدام از نقاط گوسی در یک حلقه تکرار محاسبه می شود.

1. توضیحات و تئوری

جستجو برای یافتن یک شماتیک عددی دقیق برای نمایان کردن شوک و ناپیوستگی‌ها، که در عین حال حداقل نوسانات و اتلاف را نیز داشته باشد، همواره جز چالش برانگیزترین مباحث در دینامیک سیالات محاسباتی بوده است. از دهه 1980 میلای تلاش های زیادی برای استفاده از شماتیک بالادست[[1]](#footnote-1) به دلیل دقت بالای این روش در گستره‌ی بسیاری از مسائل صورت پذیرفته است.

در مقاله [1] Roe به مقایسه روش‌های بالادست که در دهه 80 توسعه یافته بودند پرداخت. او این روش‌ها را به دو دسته Flux Vector Splitting و Flux Difference Splitting مجزا نمود و به توضیح مزایا و معایب هر کدام پرداخت. در یک کاتالوگ [2] Quirk به بررسی شرایطی پرداخت که سبب عدم موفقیت هر کدام از این روش‌ها می‌شود.

برای آن که یک روش بتواند مفید و با ارزش تلقی شود، آن روش نباید دقت و پایداری خود را در بسیاری از مسائل پایا و ناپایا، ویسکوز و غیر ویسکوز، گاز‌های ایده آل و گاز‌هایی که در شرایط عدم تعادل[[2]](#footnote-2) هستند، از دست بدهد. در راستای دستیابی به چنین روشی گام‌های موثری برداشته شد که می‌توان به معرفی روش‌های AUSM [3] و [4] و مشتقات آن، [5]AUSMDV ، HUS [6] و [7]و اشاره داشت.

روش AUSM ضعف قابل توجهی را در جهش‌های شدید پشت شوک از خود نشان می‌دهد. روش ASUMDV ترکیبی از روش‌های AUSM، Flux Vector Splitting وFlux Difference Splitting می باشد. این روش قابلیت اتکایی را که روش AUSM در مواجهه با شوک نداشت، به وجود آورد. اگرچه در این روش پدیده Carbuncle [8] نمایان می‌شود. بنابراین این روش نیز نیاز به اصلاح و بازبینی داشت. شماتیک HUS ( Hybrid Upwind Splitting) بخش غیر خطی را با Flux Vector Splitting و بخش خطی را با یک شماتیک با خاصیت پخش کم ترکیب می نماید. اگرچه در مقایسه با روش AUSMDV پدید Carbuncle به صورت ضعیف‌تر مشاهده می‌شود اما کماکان در این روش نیز این ضعف مشاهده می‌شود. همچنین باید اشاره نمود که روش‌های HUS و AUSMDV قادر به نمایش یک شوک ثابت نیستند.

Liou تلاش کرد تا دقت روش‌های Flux difference Splitting را با خاصیت بهینه بودن روش‌های Flux Vector Splitting ترکیب نماید . نتایج تلاش‌های او به معرفی روش [9] AUSM+ منجر شد که نمونه‌ی اصلاح شده روش AUSM می‌باشد. او برای روش ابتکاری خود ویژگی‌هایی از جمله:

1. حل دقیق شوک نرمال و Contact Discontinuity
2. خاصیت حفظ مثبت بودن (Positivity-Preserving)
3. افزایش دقت در مقایسه با روش AUSM و سایر روش‌های رایج و
4. آسانی و فراگیر بودن برای اعمال بر روی انواع قوانین بقا را ذکر نموده است.

نمایش شوک از لحاظ تئوری و به دلایل کاربردی، تبدیل به یک هدف بسیار مهم و با اهمیت و مورد علاقه شده است. ارتباط مشخص نمودن Contact Discontinuity، با پیش بینی دقیق لایه مرزی و لایه برشی توسط Van Leer [10] بیان شده است. خاصیت دوم (حفظ مثبت بودن) به توانایی روش در حل انواع جریان‌هایی که تحت شتاب سریع در نواحی گوشه‌ هستند، ارتباط نزدیکی دارد. همچنین Liou گزارش داده است که دقیق بودن روش او در بسیاری از مسائل آشکار شده است.

در ادامه این دستنوشت سعی می‌شود تا این روش توضیح داده شود و الگوریتم حل آن و همچنین نحوه اعمال آن در زیر برنامه AUSM+ با مرتبه‌ی پایین و بالا ذکر شود.

* 1. مبانی روش AUSM+

این روش بر اساس روش AUSM توسعه یافته است. روش AUSM بر این پایه بنا شده است که موج‌های جابجایی و آکوستیک از یکدیگر متمایز هستند. بنابراین ترم شار غیر ویسکوز به دو بخش ترم‌های جابجایی و فشار تقسیم می‌شود. برای مثال یک معادله یک بعدی بقای گاز ایده آل در نظر گرفته شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

باید یاد آوری نمود که  چگالی،  سرعت ،  انرژی کل در واحد جرم،  آنتالپی و فشار می باشد. در روش AUSM ترم جابجایی  همان طور که ذکر شد به دو بخش تقسیم می‌گردد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که c سرعت صوت است.

در این روش از جمله موارد مهم، تعیین شار عددی در صفحه  می‌باشد که صفحه بین دو سلول  و  می‌باشد.:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که می‌توان شار ناشی از جابجایی را نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که عدد ماخ صفحه مورد نظر و  می‌باشند و :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در روش AUSM این مقادیر بین دو سلول ( روی وجه ) را به شکل زیر محاسبه می‌نمایند:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

حال فارغ از تعریف فرمول‌های  و  در روش AUSM باید توجه داشت که تفاوت این روش با روش AUSM+ در تعریف همین عبارت‌ها است. بنابراین به تعریف این روش‌ها در رابطه‌ی بهینه‌شده‌ی AUSM+ پرداخته می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

به صورت معمول  برابر با  و  اتخاذ می‌گردد. اعداد ماخ سمت راست و چپ وجه مطابق زیر محاسبه می‌گردند:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

بعد از محاسبه‌ی عدد ماخ هر سلول( ) ، با استفاده از روابط تعیین شده  محاسبه می گردد و سپس عدد ماخ روی وجه  به دست می‌آید. حال در گام بعدی با توجه به مقدار عدد ماخ، شار عبوری مطابق زیر تعیین می‌گردد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

باید توجه داشت که توضیحات بالا برای حالت یک بعدی برقرار است. حال این بحث مطرح می‌گردد که اگر یک جریان چند بعدی داشته باشیم، شرایط به چه صورت می‌شود. برای همین منظور یک فلوچارت در زیر تنظیم شده تا الگوریتم حل در حالت دو بعدی مشخص شود. برای حالت 3 بعدی نیز همین الگوریتم قابل تعمیم است.

1. فلوچارت روش AUSM+

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| فرآیند حل | سمت چپ وجه (L) | سمت راست وجه (R) |
| مشخص نمودن بردار نرمال سطح و مولفه‌های سرعت در دو طرف وجه: |  |  |
| محاسبه سرعت صوت بحرانی در وجه |  | |
| محاسبه عدد ماخ در دو سمت وجه |  |  |
| تجزیه چند جمله‌ای های عدد ماخ و فشار |  |  |
| محاسبه ماخ میانگین |  | |
| محاسبه فشار میانگین |  | |
| محاسبه شار Upwind |  |  |

در اینجا نحوه گسسته سازی بخش جابجایی معادلات آورده می شود. اگر مرزهای حجم کنترل یعنی *s* را در یک شبکه محاسباتی بصورت گسسته شده در نظر بگیریم ، بخش جابجایی بصورت زير محاسبه می شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در رابطه‏(1) *j* شمارنده اضلاع حجم کنترل مي‌باشد. ذکر این نکته بسیار حائز اهمیت است که فرض می شود مقادیر بقایی *W* در یک حجم کنترل برابر مقدار آن در مرکز حجم کنترل است. همچنین با توجه به حساسیت و توجه بسیار به ساختار داده ای در هنگام پیاده سازی روش های بالادستی یکبار دیگر نحوه ذخیره نقاط و همسایه های یک ضلع آورده می شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| (الف) | )ب) |

1. سلول های سمت چپ و راست یک ضلع به همراه چیدمان نقاط و سلول‌ها در ساختار ضلع محور

در محاسبه فلاکس­ها منظور از Lهمان سلول سمت چپ يا در واقع همان سلول اصلی و R نشاندهنده سلول سمت راست يا سلولي که در همسايگي سلول اصلی قرار دارد، می باشد.

از آنجایی که در اضلاعی که بر روی مرز ها قرار دارند، مقادیر مورد نیاز در میانه ضلع با استفاده از شرایط مرزی بدست می آید، در اینجا مقادیر بدست آمده از شرایط مرزی دوردست بجای مقادیر میانه ضلع قرار داده می شود و روش بالادستی ارائه شده در این گزارش برای اینکار استفاده نخواهد شد. از آنجا که جهت اضلاع همیشه بگونه ای می باشد که میدان محاسباتی در طرف چپ قرار دارد، بنابراین مقادیر محاسبه شده برای بخش جابجایی مستقیما به سلول مجاور آن اضافه می شود. جهت پرهیز از استفاده از دستورهای شرطی و در نتیجه صرفه جویی در زمان محاسبات، با توجه به نوع اضلاع، محاسبات در حلقه های جداگانه ای انجام می شود. برای این منظور اضلاعی که بر روی مرز ها یا غیرمرزی می باشند در حلقه های جداگانه ای محاسبه مقدار بخش جابجایی برای آنها انجام می شود.

1. بخش‌های زیربرنامه

در این قسمت تمام بخش های زیربرنامه مطابق با شماره گذاری موجود در برنامه کامپیوتری ارائه شده است.

1. مشخص نمودن ضرایب ثابت

در گام اول ضرایبی که در طی الگوریتم حل استفاده می‌شوند، مشخص می‌گردد. برای مثال  ،  انتخاب می گردند. همچنین  تعریف می‌گردد.

1. صفر نمودن

در این گام آرایه‌هایی که در مقادیر شار در آن‌ها ذخیره می‌شوند در ابتدای الگوریتم برابر با صفر می‌شوند.

1. جاروب کردن وجوه مرزی

در این حلقه، به محاسبه شار عبوری از وجوه مرزی پرداخته می‌شود. از آن‌جا که مقادیر بر روی وجوه تعیین شده‌اند. بنابراین نیاز به هیچ‌گونه میانیابی احساس نمی‌شود و این مقادیر با استفاده از مقادیر مرزی به صورت مستقیم محاسبه می‌گردند.

1. مشخص نمودن شماره سلول

با استفاده از آرایه IDS شماره سلول سمت راست وجه مرزی با شماره I مشخص می‌گردد.

1. مشخص نمودن مولفه‌های سرعت

اجزای سرعت  در این گام مشخص می‌شوند. باید توجه داشت که آن‌چه در آرایه‌های WB و WNP1 ذخیره شده اند به ترتیب به شکل زیر می‌باشند. به همین دلیل برای محاسبه سرعت باید آرایه‌ی مربوطه بر چگالی تقسیم شوند.



1. مشخص نمودن سرعت نرمال

با استفاده از مقادیر مشخص شده سرعت بر روی وجه، و با استفاده از بردار نرمال سرعت نرمال معین می‌گردد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

همچنین فشار نیز در متغییر Pm ذخیره می‌گردد.

1. محاسبه شار

در گام بعد شار عبوری محاسبه می‌شود :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. ریختن به درون آرایه سلول مجاور:

شار عبوری از هر وجه باید به سلول مجاور همان وجه افزوده یا کساته شود ( که بسته به جهت بردار نرمال دارد). در این بخش این شار به درون سلول مجاور که با متغییر ME نمایان می‌شود، ریخته می‌شود.

1. جاروب کردن وجوه داخلی

بعد از محاسبه شار عبوری از وجوه مرزی و اضافه نمودن آن به سلول های مجاور، نوبت محاسبه شار عبوری از وجوه داخلی و غیر مرزی می‌باشد. از آن جا که سرعت و هیچ کدام یک از مولفه ها در این وجوه مشخص نیستند، بنابراین با استفاده از روش های مختلف در این وجوه سعی می‌شود تا مقدار مناسب تخمین زده شود. در این زیر برنامه از روش AUSM+ جهت محاسبه شار استفاده می‌گردد که در قبل نیز توضیحات آن شرح داده شده است.

1. مشخص کردن سلول‌های مجاور و بردارهای عمود و مساحت ضلع

در این بخش با استفاده از ارایه‌ی IDS سلول‌های مجاور مشخص می‌شوند. سلول سمت چپ در متغییر L و سلول سمت راست با استفاده از متغییر R مشخص می‌گردد. از آنجا که به بردارهای عمود یکه نیاز می باشد باید بردارهای عمود بر مساحت ضلع تقسیم گردد که در اینجا اینکار انجام می شود. بنابراین بردارهای عمود یکه و همچنین مساحت ضلع در پارامترهای محلی ذخیره می شوند.

1. محاسبه مرکز وجوه

مرکز هریک از وجوه با تقسیم مجموع مختصات­های هر یک از وجوه بر تعداد نقاط بدست می­آید. این مراکز برای محاسبه فاصله هر وجه تا مرکز سلول مربوطه استفاده می­شود.

1. مشخص نمودن خاصیت‌ها در سمت چپ

در این قسمت خاصیتهای سمت چپ مشخص می‌گردند. توجه شود که در حالت خاصیت سمت چپ با دقت مرتبه یک برونیابی می‌شود. یعنی مقدار خاصیت در سمت چپ نقطه مورد بررسی برابر است با مقدار خاصیت در مرکز سلول مورد نظر. اما در مرتبه‌های بالا این خاصیت ها با استفاده از مشتقات مرتبه اول و دوم و .. برونیابی می‌گردند.

1. مشخص نمودن خاصیت‌ها در سمت راست

در این بخش نیز مطابق با بخش قبل خاصیت‌های برونیابی شده با استفاده از سلول سمت راست وجه محاسبه می‌گردند.

1. محاسبه سرعت صوت بحرانی

ابتدا آنتالپی در هر سمت معین می‌شود و سپس سرعت صوت بحرانی محاسبه می‌شود. توجه شود که در اینجا از واژه سرعت صوت بحرانی استفاده شده است که توسط Liou معرفی و به کار گرفته شده است. و با تعریف سرعت صوت متفاوت می‌باشد. فرمل‌های مورد نظر برای محاسبه آنتالپی  و سرعت صوت بحرانی در فلوچارت آمده است .

1. محاسبه سرعت نرمال

با استفاده از مولفه‌های سرعت و بردار نرمال بر وجه سرعت نرمال بر وجه (Contra variant) محاسبه می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. محاسبه سرعت صوت

با استفاده از  مقدار سرعت صوت در وجه مشخص می‌گردد. ابتدا  در دو طرف وجه مشخص می‌گردند و سپس مقدار ماکزیمم به عنوان سرعت صوت در وجه انتخاب می‌گردد. باید توجه داشت که در برخی مقالات مقدار مینیمم سرعت محاسبه شده در دو طرف وجه به عنوان سرعت صوت میانگین در وجه انتخاب می‌شود. تقریبا این انتخاب بسته به مساله ممکن است سبب افزایش پایداری یا ناپایداری حل ‌شود و بیشتر بستگی به مساله دارد (تجربه نگارنده نشان می‌دهد هر کدام از این انتخاب‌ها در سرعت‌های مافوق صوت ممکن است سبب واگرایی مساله شوند).

1. محاسبه عدد ماخ

با استفاده از سرعت صوت محاسبه شده در وجه ( مرحله قبل) و سرعت نرمال بر وجه، عدد ماخ محاسبه می‌گردد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. ساختن چند جمله‌ای‌های ماخ

بعد از محاسبه اعداد ماخ در دو طرف وجه، نوبت به ساخت چند جمله‌ای های ماخ است که نحوه ایجاد آن‌ در زیر بیان شده است. آنچه که نیاز است و .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. محاسبه عدد ماخ در وجه

بعد از تشکیل چند جمله‌ای با استفاده از رابطه عدد ماخ در وجه محاسبه می‌شود.

1. ساختن چند جمله‌ای‌های فشار

در این بخش سرعت چند جمله‌ای فشار ساخته می‌شود.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. محاسبه فشار در وجه

بعد از تشکیل چند جمله‌ای با استفاده از رابطه ، فشار میانگین در وجه محاسبه می‌شود

1. محاسبه شار جرمی عبوری از وجه

با استفاده از سرعت صوت میانگین و عدد ماخ محاسبه شده در وجه، با توجه به جهت عدد ماخ، شار جرمی هر وجه محاسبه می‌گردد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. محاسبه بردار شار

در گام نهایی با استفاده از آخرین گام ارائه شده در فلوچارت بردار شار با توجه به علامت عدد ماخ (مثبت و منفی بودن) و متعاقب آن شار جرمی محاسبه می‌شوند.

1. اضافه کردن شار‌های محاسبه شده وجه مورد نظر به سلول‌های همسایه

باعد از محاسبه شار عبوری از هر وجه‌، این شار به سلول‌های مجاور اضافه (یا کم ) می‌شود. باید توجه شود که این کم شدن به دلیل جهت معکوس بردار نرمال نتیجه می‌شود.

.

1. مراجع

[1] P. Roe, “A Survey of Upwind Differencing Techniques,” *Lecture Notes in Physics,* جلد 323, p. 69, 1989.

[2] J. J. Quirk, ICASE , 1992.

[3] M. Liou و C. J. Steffen, “A new flux splitting scheme,” *Journal of Computational Physics,* جلد 107, شماره 23, 1993.

[4] M. Liou, “On a New Class of Flux Splitting,” *in Lecture Notes in Physics,* جلد 414, p. 115, 1993.

[5] Y. Wada و M. Liou, “An accurate and robust flux splitting scheme for shock and contact discontinuities,” *SIAM J. on Scientific Computing,* 1977.

[6] F. Coquel و M. Liou, “Stable and Low Diffusive Hybrid Upwind splitting Methods,” 1992.

[7] F. Conquel و M. Liou, “Field by Field Hybrid Upwind Splitting Methods,” 1993.

[8] R. W. MacCormack, “The Carbuncle CFD Problem,” 2011.

[9] M. Liou, “A Sequel to AUSM: AUSM1,” *JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS,* جلد 129, p. 364–382, 1996.

[10] B. Van Leer, J. L. Thomas, P. L. Roe و R. W. Newsome, 1987.

1. Upwind [↑](#footnote-ref-1)
2. Non equilibrium [↑](#footnote-ref-2)